# 第5講　媒介変数で表された曲線

5

［A］ 原点を中心として回転する半直線 $L$ と $L$ に接しながら動く半径1の円 $C$ がある．時刻 $t=0$ では，半直線 $L$ は $y$ 軸の負の部分に一致しており，円 $C$ は中心が $(1,\ 0)$ にあって原点で $L$ に接しているとする．時刻 $t$ では，半直線 $L$ は原点を中心に正の向きに $t$ だけ回転し，$C$ は $L$ 上を滑らずにころがって原点から $2t$ の距離の点Rで $L$ に接しているとする．円の中心をPとする．点Qは $C$ の周上の定点で $t=0$ では原点にあるとする．

(1) 時刻 $t$ でのPとQの座標を媒介変数 $t$ で表せ．

(2) $t$ が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くときのPの軌跡を $K_1$ とし，Qの軌跡を $K_2$ とする．$(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，$(\pi,\ 1)$ と $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および $K_1$ と $K_2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［B］ 関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し，次の条件を満たす正の数 $a$ を考える．

$$\begin{cases} |\theta|<a \text{ ならば } f(\theta)>0 \\ |\theta|=a \text{ ならば } f(\theta)=0 \end{cases}$$

(1) $a$ の値を求めよ．

(2) 曲線 $C$ を媒介変数 $\theta\ (-a\leqq\theta\leqq a)$ を用いて

$$C:\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

で定める．$x$ 軸に平行な直線 $y=t$ と曲線 $C$ が共有点をもつような実数 $t$ の値の範囲を求め，共有点の $x$ 座標を $t$ で表せ．

(3) 曲線 $C$ と $y$ 軸とで囲まれる図形を，$y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >


ⒸRECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第５講　媒介変数で表された曲線

5　座標平面上に原点Oを中心とする半径２の円 $C_1$ がある．半径１の円 $C_2$ が $C_1$ に外接しながら滑ることなく転がるとき，$C_2$ 上の定点Pが描く曲線について考える．$C_2$ の中心をQとし，Qが点 $(3,\ 0)$ にあるとき，Pは点 $(4,\ 0)$ にあるとする．このとき，$x$ 軸の正の方向から線分OQへ測った角を $\theta$ として，以下の問いに答えよ．

(1)　Qを始点として $x$ 軸の正の方向に平行で同じ向きの半直線から線分QPへ測った角は $3\theta$ であることを示せ．

(2)　点Pの座標 $(x,\ y)$ を $\theta$ で表せ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において $y$ の最大値を求めよ．

(4)　$\theta$ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点Pの描く曲線の長さを求めよ．

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

< Note >



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第5講　媒介変数で表された曲線

5

［A］　原点を中心として回転する半直線 $L$ と $L$ に接しながら動く半径1の円 $C$ がある．時刻 $t=0$ では，半直線 $L$ は $y$ 軸の負の部分に一致しており，円 $C$ は中心が $(1,\ 0)$ にあって原点で $L$ に接しているとする．時刻 $t$ では，半直線 $L$ は原点を中心に正の向きに $t$ だけ回転し，$C$ は $L$ 上を滑らずにころがって原点から $2t$ の距離の点Rで $L$ に接しているとする．円の中心をPとする．点Qは $C$ の周上の定点で $t=0$ では原点にあるとする．

(1)　時刻 $t$ でのPとQの座標を媒介変数 $t$ で表せ．

(2)　$t$ が0から $\dfrac{\pi}{2}$ まで動くときのPの軌跡を $K_1$ とし，Qの軌跡を $K_2$ とする．$(0,\ 0)$ と $(1,\ 0)$ を結ぶ線分，$(\pi,\ 1)$ と $(\pi,\ 2)$ を結ぶ線分および $K_1$ と $K_2$ で囲まれる部分の面積を求めよ．

［B］　関数 $f(\theta)=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta$ に対し，次の条件を満たす正の数 $a$ を考える．

$$\begin{cases} |\theta|<a \text{ ならば } f(\theta)>0 \\ |\theta|=a \text{ ならば } f(\theta)=0 \end{cases}$$

(1)　$a$ の値を求めよ．

(2)　曲線 $C$ を媒介変数 $\theta\ (-a\leqq\theta\leqq a)$ を用いて

$$C:\begin{cases} x=f(\theta) \\ y=\sin\theta \end{cases}$$

で定める．$x$ 軸に平行な直線 $y=t$ と曲線 $C$ が共有点をもつような実数 $t$ の値の範囲を求め，共有点の $x$ 座標を $t$ で表せ．

(3)　曲線 $C$ と $y$ 軸とで囲まれる図形を，$y$ 軸のまわりに1回転してできる立体の体積を求めよ．

**【答】**　［A］　(1) $\mathrm{P}(2t\sin t+\cos t,\ -2t\cos t+\sin t)$，$\mathrm{Q}(2t\sin t,\ -2t\cos t+2\sin t)$

(2) $\dfrac{3}{4}\pi$

［B］　(1) $a=\dfrac{3}{4}\pi$　(2) $-1\leqq t\leqq 1$，$x=\begin{cases} \sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2} & \left(|t|<\dfrac{1}{\sqrt{2}}\right) \\ \sqrt{2}\,t^2\pm\sqrt{1-t^2} & \left(\dfrac{1}{\sqrt{2}}\leqq|t|\leqq 1\right) \end{cases}$

(3) $\sqrt{2}\,\pi\left(\dfrac{14}{15}+\dfrac{3}{8}\pi\right)$

**【解説】**

［A］　(1)

$$\overrightarrow{\mathrm{OR}}=2t\left(\cos\left(-\frac{\pi}{2}+t\right),\ \sin\left(-\frac{\pi}{2}+t\right)\right)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{RP}}=(\cos t,\ \sin t)$$

$$\overrightarrow{\mathrm{PQ}}=(\cos(\pi-t),\ \sin(\pi-t))$$



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

となるので，

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OP}&=\overrightarrow{OR}+\overrightarrow{RP}\\&=2t(\sin t,\ -\cos t)+(\cos t,\ \sin t)\\&=\boldsymbol{(2t\sin t+\cos t,\ -2t\cos t+\sin t)}\\\overrightarrow{OQ}&=\overrightarrow{OP}+\overrightarrow{PQ}\\&=\boldsymbol{(2t\sin t,\ -2t\cos t+2\sin t)}\end{aligned}$$

(2)　$K_1$，$K_2$ の表す曲線はそれぞれ

$$K_1:\begin{cases}x_1=2t\sin t+\cos t\\y_1=-2t\cos t+\sin t\end{cases}$$

$$K_2:\begin{cases}x_2=2t\sin t\\y_2=-2t\cos t+2\sin t\end{cases}$$

とおけるので，求める面積は

$$\begin{aligned}\int_0^{\pi}y_2dx_2-\int_1^{\pi}y_1dx_1&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+2\sin t)\cdot 2(\sin t+t\cos t)dt\\&\quad-\int_0^{\frac{\pi}{2}}(-2t\cos t+\sin t)\cdot(\sin t+2t\cos t)dt\\&=\int_0^{\frac{\pi}{2}}3\sin^2 t\,dt\\&=\frac{3}{2}\int_0^{\frac{\pi}{2}}(1-\cos 2t)dt\\&=\frac{3}{2}\left[t-\frac{1}{2}\sin 2t\right]_0^{\frac{\pi}{2}}\\&=\boldsymbol{\frac{3}{4}\pi}\end{aligned}$$

［B］ (1)

$$\begin{aligned}f(\theta)>0&\iff \sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta>0\\&\iff \sqrt{2}\cos^2\theta-\cos\theta-\sqrt{2}<0\\&\iff (\sqrt{2}\cos\theta+1)(\cos\theta-\sqrt{2})<0\\&\iff \cos\theta>-\frac{1}{\sqrt{2}}\end{aligned}$$

$-\pi<\theta\leqq\pi$ の範囲でこの不等式を解くと $-\frac{3}{4}\pi<\theta<\frac{3}{4}\pi$ であるので，$\boldsymbol{a=\frac{3}{4}\pi}$

(2)

$$\begin{aligned}y=t&\iff \sin\theta=t\\&\iff \boldsymbol{-1\leqq t\leqq 1}\quad\left(-\frac{3}{4}\leqq\theta\leqq\frac{3}{4}\pi\text{ より}\right)\end{aligned}$$

また $|t|\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}$ のとき $\sin\theta=t$ を満たす $\theta$ は２つ存在し，$|t|<\frac{1}{\sqrt{2}}$ のときは１つ存在しているので

$$x=\sqrt{2}\sin^2\theta+\cos\theta=\begin{cases}\boldsymbol{\sqrt{2}\,t^2\pm\sqrt{1-t^2}}&\left(\boldsymbol{|t|\geqq\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\\\boldsymbol{\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2}}&\left(\boldsymbol{|t|<\frac{1}{\sqrt{2}}}\right)\end{cases}$$

©RECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(3)　(2)より求める体積 $V$ について，対称性に注目すると

$$\frac{1}{2}V=\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}\pi\{(\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2}\,)^2-(\sqrt{2}\,t^2-\sqrt{1-t^2}\,)^2\}dt+\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}\pi(\sqrt{2}\,t^2+\sqrt{1-t^2}\,)^2dt$$

$$=\pi\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}4\sqrt{2}\,t^2\sqrt{1-t^2}\,dt+\pi\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2t^4-t^2+1+2\sqrt{2}\,t^2\sqrt{1-t^2}\,)dt$$

ここで

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}(2t^4-t^2+1)dt=\left[\frac{2}{5}t^5-\frac{1}{3}t^3+t\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}$$

$$=\left[\frac{1}{15}t(6t^4-5t^2+15)\right]_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}=\frac{7\sqrt{2}}{15}$$

$$\int_{\frac{1}{\sqrt{2}}}^{1}t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=\int_{\frac{\pi}{4}}^{0}\cos^2\theta\sin\theta\cdot(-\sin\theta\,d\theta)$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{4}\sin^2 2\theta\,d\theta$$

$$=\int_0^{\frac{\pi}{4}}\frac{1}{8}(1-\cos 4\theta)d\theta$$

$$=\left[\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_0^{\frac{\pi}{4}}=\frac{\pi}{32}$$

同様に

$$\int_0^{\frac{1}{\sqrt{2}}}t^2\sqrt{1-t^2}\,dt=\left[\frac{1}{8}\left(\theta-\frac{1}{4}\sin 4\theta\right)\right]_{\frac{\pi}{4}}^{\frac{\pi}{2}}=\frac{\pi}{32}$$

であるので

$$\frac{1}{2}V=4\sqrt{2}\,\pi\times\frac{\pi}{32}+\pi\times\frac{7\sqrt{2}}{15}+2\sqrt{2}\,\pi\times\frac{\pi}{32}$$

$$\therefore\quad V=\frac{3\sqrt{2}}{8}\pi^2+\frac{14\sqrt{2}}{15}\pi=\boldsymbol{\sqrt{2}\,\pi\left(\frac{14}{15}+\frac{3}{8}\pi\right)}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

# 第５講　媒介変数で表された曲線

5　座標平面上に原点Oを中心とする半径2の円 $C_1$ がある．半径1の円 $C_2$ が $C_1$ に外接しながら滑ることなく転がるとき，$C_2$ 上の定点Pが描く曲線について考える．$C_2$ の中心をQとし，Qが点 $(3,\ 0)$ にあるとき，Pは点 $(4,\ 0)$ にあるとする．このとき，$x$ 軸の正の方向から線分OQへ測った角を $\theta$ として，以下の問いに答えよ．

(1)　Qを始点として $x$ 軸の正の方向に平行で同じ向きの半直線から線分QPへ測った角は $3\theta$ であることを示せ．

(2)　点Pの座標 $(x,\ y)$ を $\theta$ で表せ．

(3)　$0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ において $y$ の最大値を求めよ．

(4)　$\theta$ が $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ の範囲を動くとき，点Pの描く曲線の長さを求めよ．

**【答】** (1) 略　(2) $\begin{cases} x = 3\cos\theta + \cos 3\theta \\ y = 3\sin\theta + \sin 3\theta \end{cases}$　(3) $2\sqrt{2}$　(4) 24

**【解説】**

(1)　Qに関してPの対称な点をR，$C_1$ と $C_2$ の接点をSとおく．A$(2,\ 0)$ とし，$\angle \mathrm{AOQ} = \theta$ のとき，

$$\overset{\frown}{\mathrm{AS}} = \overset{\frown}{\mathrm{SR}} \iff \mathrm{OA} \cdot \angle \mathrm{AOQ} = \mathrm{QR} \cdot \angle \mathrm{SQR}$$

$$\therefore\quad \angle \mathrm{SQR} = 2\theta$$

よって求める角は

$$\angle \mathrm{AOS} + \angle \mathrm{SQR} = 3\theta$$

(2)　$\overrightarrow{\mathrm{OQ}} = 3(\cos\theta,\ \sin\theta)$，$\overrightarrow{\mathrm{QP}} = (\cos 3\theta,\ \sin 3\theta)$ より

$$\overrightarrow{\mathrm{OP}} = \overrightarrow{\mathrm{OQ}} + \overrightarrow{\mathrm{QP}} = \boldsymbol{(3\cos\theta + \cos 3\theta,\ 3\sin\theta + \sin 3\theta)}$$

(3)　$y = 3\sin\theta + \sin 3\theta$ より

$$\frac{dy}{d\theta} = 3\cos\theta + 3\cos 3\theta$$

$$= 12\cos\theta\left(\cos\theta - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(\cos\theta + \frac{1}{\sqrt{2}}\right)$$

であるので，$0 \leqq \theta \leqq \pi$ における $y$ の増減は

| $\theta$ | 0 | $\cdots$ | $\frac{\pi}{4}$ | $\cdots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\cdots$ | $\frac{3}{4}\pi$ | $\cdots$ | $\pi$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $y'$ | | ＋ | 0 | － | 0 | ＋ | 0 | － | |
| $y$ | | ↗ | | ↘ | | ↗ | | ↘ | |

となるので $y$ の最大値は $\theta = \frac{\pi}{4}$ と $\frac{3}{4}\pi$ のとき

$$3 \cdot \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}} = 2\sqrt{2}$$

$\pi < \theta \leqq 2\pi$ のとき $\sin\theta \leqq 0$ より

$$y = 3\sin\theta + \sin 3\theta \leqq 1$$

であるから，$\boldsymbol{2\sqrt{2}}$ は $0 \leqq \theta \leqq 2\pi$ における $y$ の最大値である．



©RECRUIT HOLDINGS
本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。

(4)　$\dfrac{dx}{d\theta}=-3\sin\theta-3\sin 3\theta$ より

$$\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2+\left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2=18+18\cos 2\theta$$
$$=36\cos^2\theta$$

となるので P の描く曲線の長さは

$$\int_0^{2\pi}\sqrt{36\cos^2\theta}\,d\theta=\int_0^{2\pi}6|\cos\theta|d\theta$$
$$=24\int_0^{\frac{\pi}{2}}\cos\theta\,d\theta$$
$$=24\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}}=\mathbf{24}$$

ⒸRECRUIT HOLDINGS

本サービスに関する知的財産権その他一切の権利は著作権者に帰属します。
また本サービスに掲載の全部または一部につき無断複製・転載を禁止します。